Adiabatische Transformationen in der Quantentheorie und ihre Behandlung durch Niels Bohr.

Von P. Ehrenfest, Leiden.

§ 1. *Bohrs* Arbeiten[1]) bringen eine unübersehbare Fülle fruchtbarer Anwendungen seiner Theorie. In den Genuß dieses Reichtums versunken, müssen wir immer wieder durch *Bohr* selber daran erinnert werden, was denn das *eigentliche* Problem ist, mit dem er ringt: die Entschleierung der *Prinzipien* der Theorie, die einmal die „klassische" Theorie ablösen soll. — In dem gegenwärtigen Stadium muß man sich bei der Formulierung dieser Prinzipien unausgesetzt solcher Begriffe bedienen, die in der klassischen Mechanik und Elektrodynamik entwickelt werden. Leicht entsteht dadurch der Eindruck, als ob z. B. das Korrespondenzprinzip oder das Adiabatenprinzip eine „Versöhnung" der Quantentheorie mit der klassischen Theorie oder geradezu eine Rückkehr zu ihr vorbereiten. *Bohr* aber weiß uns überzeugend zu demonstrieren: diese Prinzipien sind trotz ihrer vorläufig quasiklassischen Formulierung „als rein quantentheoretische Sätze" anzusehen[2]); sie weisen voraus und durchaus nicht zurück! — Aufgefordert hier eines dieser Prinzipien, das „Adiabatenprinzip" zu besprechen, das in *Bohrs* Händen zu einem so wunderbar scharfen und geschmeidigen Instrument geworden ist, fühlte ich mich in Verlegenheit, wie das zu tun; denn es ist — wie ich glaube — vorläufig keine tiefere und zugleich prägnantere Besprechung des Adiabatenprinzips möglich, als diejenige, die *Bohr* selber gibt, wobei er auch so feintastend die organischen Beziehungen[3]) zwischen Adiabatenprinzip und Korrespondenzprinzip verfolgt. Ich sah nur eine Möglichkeit, der an mich ergangenen Aufforderung Folge zu leisten: Ich konnte versuchen, in einer mehr genetischen Darstellung zu zeigen, wie man allmählich zur „*Adiabathenhypothese*", zur Hervorhebung des Begriffs der „*adiabatischen Invarianten*" und zum Theorem der „*adiabatischen Invarianz der apriorischen Gewichte*" in der Quantenstatistik hingeführt wurde, und hatte dann schließlich auf die Stellen in *Bohrs* Schriften hinzuweisen, in denen besonders deutlich hervortritt, welche Klärung und Vertiefung und welche ganz neuen Perspektiven wir auch hier wieder *Bohrs* Eingreifen verdanken.

§ 2. Vorweg sei betont: *Boltzmanns* Strahlungsgesetz und *W. Wiens* Verschiebungsgesetz — genauer das Geheimnis, das sich hinter den eleganten elektrodynamisch thermodynamischen Ableitungen dieser Gesetze verbirgt[4]) —, das war es, was auf den Weg lockte, der zum Adiabatenprinzip führt[5]). — *W. Wiens* Verschiebungsgesetz war auf rein *klassischer* Grundlage abgeleitet worden. Wie konnte es dennoch unerschüttert bestehen bleiben mitten in der Welt der Strahlungserscheinungen, deren *antiklassischer* Quantencharakter stets unerbittlicher hervortrat? — Die Verwunderung darüber ließ sich nicht ersticken; etwa durch den Hinweis auf die asymptotische „Gültigkeit" der klassischen Mechanik im Gebiete hoher Quantenzahlen. Denn das Verschiebungsgesetz beansprucht ja strenge Gültigkeit auch im Gebiete kleiner Quantenzahlen; nämlich auch für kleines T und großes ν. Man war damit — vom heutigen Gesichtspunkt aus betrachtet — einem *besonderen* Typus von „pseudoklassischem" Verhalten eines Quantensystems auf die Spur gekommen, und aus der Analyse der Ableitung des Verschiebungsgesetzes mußte man etwas darüber lernen können, inwieweit man mitten in der Quantenwelt mit Hilfe der *klassischen Mechanik* (Elektrodynamik) und klassischen Thermodynamik — also doch wohl der

[1]) Diejenigen Arbeiten von *N. Bohr*, die wir im folgenden besonders häufig zitieren müssen, seien folgendermaßen abkürzend bezeichnet: 1. On the quantum theory of line-spectra. Kopenhagen-Akad. 1918 u. 1922 = Über die Quantentheorie der Linienspektra. Vieweg 1923 [„Q. d. L."]. — 2. Die Grundpostulate d. Quantenth. Zschr. f. Phys. *13* (1923), S. 117 [„Grundpost."]. — 3. Die Anwendungen der Quantenth. auf period. Systeme (eine Arbeit, die im Aprilheft 1916 des Phil. Mag. erscheinen sollte, aber — übersetzt nach dem druckfertigen Korrekturbogen — nur erst 1921 publiziert wurde: Abh. X in „Abhandl. über Atombau"). Vieweg 1921 [„Abh. X."] — 4. Die Einleitung zu dem eben genannten Buch [„Geleitwort"].

[2]) *N. Bohr*, „Grundpostul." S. 165; siehe auch S. 129, 117, 139, Fußnote S. 142.

[3]) *N. Bohr*, „Geleitwort" S. XVI unten, XVII oben; „Grundpostul." S. 132 unten und S. 146 oben.

[4]) In einer besonders faszinierenden Weise behandelte *H. A. Lorentz* im Jahre 1900 dieses Geheimnis eben als Geheimnis in „De theorie der straling en de tweede wet der thermodynamica". Versl. Akad. Amsterd. *9*, 417, 1900 = Proc. Amst. *3*, 436, 1900. — Die dort entwickelte *Modellbetrachtung* ließ sich speziell auch zur Analyse der Struktur von *Plancks* Strahlungstheorie verwenden; siehe *P. Ehrenfest*, Über die physikal. Voraussetzungen der Planckschen Theorie irreversibler Strahlungsvorgänge. Sitzber. Wien. Akad. *114*, 1301, 1905.

[5]) Es sei gestattet, einige meiner Publikationen, die ich mehrfach zitieren muß, durch folgende Abkürzungen zu bezeichnen: *A*. Zur Planckschen Strahlungstheorie. Phys. Z. (1906), S. 528 [„A"]. — *B*. Welche Züge der Lichtquantenhypothese spielen in der Theorie der Wärmestrahlung eine wesentliche Rolle? Ann. d. Phys. *36*, 91, 1911 [„B"]. — *C*. Bemerkung betreffs der spezif. Wärme zweiatomiger Gase. Verh. Deutsch. phys. Ges. *15*, 451, 1913 [„C"]. — *D*. Een mechan. theorema van *Boltzmann* en zijne betrekking tot de theorie der quanta. Versl. Akad. Amsterd. *22*, 586, 1913 = Proc. Amst. *16*, 591, 1913 [„D"]. — *E*. Zum Boltzmannschen Entropie-Wahrscheinlichkeits-Theorem. Phys. Zschr. *15*, 657, 1914 [„E"]. — *F*. Over adiabatische veranderingen van een stelsel in verband met de theorie der quanta. *25*, 412, 1916 = Proc. Amst. *19*, 576, 1916 = Ann. d. Phys. *51*, 327, 1916 [„F"].

Boltzmannschen Statistik! — noch richtige Resultate finden kann. — Von Bedeutung war dabei noch der Umstand[6]), daß schon 1902 *Lord Rayleigh* ein mechanisches Theorem abgeleitet und auf den Beweis von *Boltzmanns* Strahlungsgesetz angewendet hatte[7]), das erlaubt alle mechanisch-elektrodynamischen Elemente in der Ableitung des Wienschen Verschiebungsgesetzes außerordentlich prägnant zusammenzufassen[8]); viel prägnanter als in den üblichen Darstellungen, welche etwa mit Lichtstrahlen und Dopplerprinzip operieren[9]). Ich meine das folgende Theorem: Sind die Eigenschwingungen eines Spiegelhohlraumes durch Einbringung einer beliebigen Strahlung erregt, und verkleinert man nun unendlich langsam den Hohlraum durch Zusammenschieben der Spiegelwände, so wachsen dabei (auf Kosten der gegen den Strahlungsdruck geleisteten Kompressionsarbeit) die Partialenergien aller Eigenschwingungen, und zwar direkt proportional mit ihrer Frequenz:

$$\frac{\varepsilon_s'}{\nu_s'} = \frac{\varepsilon_s}{\nu_s} \qquad \ldots\ldots\ldots (1$$

ε_s, ε_s' der Energieinhalt; ν_s, ν_s' die Frequenz der s-ten Eigenschwingung vor und nach der „adiabatischen" Kompression.

Dieses Theorem von *Rayleigh* half sehr wesentlich bei den Bemühungen zur Aufklärung der *Stellung,* die dem *Verschiebungsgesetz innerhalb der Planckschen Strahlungstheorie* so recht eigentlich zukommt. Es sei gestattet, hierauf näher einzugehen; denn hier begann sich — allerdings zunächst nur erst in einem einzigen und eigenartigen Grenzfall[10]) — die Rolle zu enthüllen, die die adiabatischen Invarianten allgemein in der Quantentheorie und insbesondere auch in der Quantenstatistik spielen.

§ 3. *Plancks* Energiestufenhypothese ($\varepsilon = 0, h\nu, 2h\nu, \ldots$) lieferte (1901) eine Strahlungsformel, die allen Erfahrungen genügte. Waren aber alle einzelnen Züge dieser Hypothese *notwendig?* — Je deutlicher zu Bewußtsein kam, daß es jedenfalls nicht leicht sein würde, sie mit klassischen Mitteln zu deuten, desto interessanter wurde es, zu analysieren: Welche Züge dieser Hypothese sind *notwendig,* um zu erreichen, daß die Strahlungsformel einen im *allgemeinen* annehmbaren Verlauf besitzt, und welche Züge bestimmen nur die quantitativen *Einzelheiten* ihres Verlaufes. — Dabei war es etwas bequemer, nicht mit *Planck* die Energieverteilung über die „Resonatoren", sondern mit *Rayleigh* die Energieverteilung über die Eigenschwingungen eines Spiegelhohlraumes zu betrachten[11]). — Die Anwendung von *Boltzmanns* Theorem der Energieäquipartition führt hier — wie *Rayleigh* betont hatte — unmittelbar zu einer Absurdität; zur „Violettkatastrophe": Die unendlich vielen ultravioletten Eigenschwingungen des Hohlraumes würde jede den Energiebetrag kT auf sich nehmen, also zusammen unendlich viel Energie. Welcher Zug der Energiestufenhypothese ist es nun, der vor allem diese Violettkatastrophe abwendet? — *Boltzmanns* kombinatorische Ableitung der „wahrscheinlichsten" Zustandsverteilung stützt sich wesentlich auf die Festsetzung: als „a priori gleichwahrscheinlich" sollen Gebiete gleich großen Volumens im Phasenraum der Moleküle („μ-Raum") gelten; d. h. *Boltzmann* belegt den μ-Raum mit überall gleichem „Gewicht". Gerade damit steht in engstem Zusammenhang, daß *Boltzmann* stets zur Äquipartition der (kinetischen) Energie geführt wird. *Plancks* Energiestufenhypothese belegt dagegen alle Punkte im Phasenraum eines Resonators mit dem Gewicht Null, und allein der Nullpunkt ($q = p = o$) und die Ellipsen $\varepsilon = h\nu, 2h\nu, \ldots$ erhalten ein Gewicht. Damit verläßt *Planck* den Boltzmannschen Standpunkt und befreit eben dadurch das Strahlungsgleichgewicht von der Äquipartition. Aus dem statistischen Teil von *Plancks* Theorie war deutlich zu ersehen: das Größerwerden der Energiestufen mit wachsendem ν sorgte für den Abfall der Strahlungsformel im Ultraviolett und wendete die Violettkatastrophe ab — ultraviolette Eigenschwingungen bekommen bei einer gegebenen Temperatur sozusagen sehr viel weniger Chancen („a posteriori"), von dem Energieniveau Null wegzukommen, als ein ultraroter Konkurrent mit seinen viel bescheideneren Anforderungen[12]).

§ 4. Um die Analyse weiter zu vertiefen, mußte man einmal der statistischen Rechnung eine allgemeinere Gewichtsverteilung („Wahrscheinlichkeit a priori") zugrunde legen, welche

[6]) Siehe die Berufung auf *Rayleigh* in *P. Ehrenfest* (1911 „B") S. 94.

[7]) *Rayleigh,* On the pressure of vibrations. Phil. Mag. *3,* 338, 1902 = Scient. Pap. V, Nr. 276. *Rayleigh* knüpft dort an zwei instruktive mechanische Beispiele an: Unendlich langsame Verkürzung 1° der Fadenlänge eines Pendels, 2° der Länge einer transversal schwingenden Saite durch Überschieben einer engen Röhre.

[8]) *Rayleigh* hatte sich darauf beschränkt, die Ableitung des Boltzmannschen Strahlungsgesetzes zu geben. In der Abhandl. „B" (1911), S. 94 wies ich kurz darauf hin, daß *Rayleighs* Theorem auch „die bequemste Ableitung für das Wiensche Verschiebungsgesetz" liefert. Man findet diese Art der Ableitung, die für die Vorlesung sehr geschickt ist, in extenso bei *L. Brillouin,* La théorie des Quanta (Paris 1922), S. 177. Siehe auch *J. Kunz,* Phil. Mag. *45,* 300, 1923.

[9]) Bis vor kurzer Zeit hatte ich eine methodisch besonders interessante Arbeit von *H. A. Lorentz* (De stralings wetten van Boltzmann en Wien" Versl. Akad. Amsterd. *9,* 572, 1901 = Proc. Amst. *3,* 607, 1901) übersehen, die *Rayleigh* zitiert und in der schon eine Ableitung des Verschiebungsgesetzes gegeben wird. die vermeidet mit Lichtstrahlen zu operieren und sich an Stelle dessen auf die Fourierzerlegung des elektromagnetischen Feldes stützt. Auch wird diese Ableitung nicht auf einer mechanischen Analogie aufgebaut, sondern rein elektromagnetisch durchgeführt, und zwar mit besonderer Strenge.

[10]) Vgl. Fußnote (31).

[11]) *P. Ehrenfest,* Zur Planckschen Strahlungstheorie, Phys. Z. S. *7,* 528 1906; *P. Debye,* Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Theorie der Strahlung, Ann. d. Phys. *33,* 1427, 1910.

[12]) *P. Ehrenfest* „A" (1906) § 5.

die Boltzmannsche und die Plancksche als Spezialfälle umfaßte[13]). Es bezeichne also:

$$\gamma(\nu, \varepsilon)\, d\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2$$

die „Wahrscheinlichkeit a priori“ dafür, daß eine Eigenschwingung von der Frequenz ν einen Energieinhalt zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ besitzt, und es sei für einen Spiegelhohlraum von 1 cm³ Inhalt

$$N(\nu)\, d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\, d\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3$$

die Anzahl der Eigenschwingungen von der Frequenz $\nu \rightarrow \nu + d\nu$. Dann erhält man[14]) für die „wahrscheinlichste“ Zustandsverteilung bei der Temperatur T als den gesamten Energieinhalt dieser $N(\nu)\, d\nu$ Eigenschwingungen die folgende Größe:

$$\varrho(\nu, T)\, d\nu = d\nu\, \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\, \frac{\int_0^\infty d\varepsilon\, \gamma(\nu, \varepsilon)\, e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\, \varepsilon}{\int_0^\infty d\varepsilon\, \gamma(\nu, \varepsilon)\, e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}} \quad . \quad (4$$

Je nach der Wahl von $\gamma(\nu, \varepsilon)$ richtet sich die Strahlungsformel, die man erhält[15]). Zu einer bedeutsamen näheren Determination der Gestalt von $\gamma(\nu, \varepsilon)$ führte die folgende Bemerkung[16]): *Boltzmanns* mechanisch-statistische Ableitung des zweiten Hauptsatzes, d. h. seine Ableitung der Gleichung

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{\delta E + \delta A}{T} = k\, \delta \lg W \quad . \quad . \quad . \quad (5$$

stützte sich wesentlich auf die obenerwähnte Festsetzung, daß allen Punkten des „μ-Raumes“ (Phasenraumes der Moleküle) ein und dasselbe apriorische Gewicht zukommt. Die Plancksche Energiestufenhypothese und verallgemeinernd die Gewichtswahl $\gamma(\nu, \varepsilon)$ durchbricht aber diese Festsetzung für den (zweidimensionalen) „μ-Raum“ der Eigenschwingungen. Was ist die allgemeinste $\gamma(\nu, \varepsilon)$, die dennoch die Boltzmannsche Beziehung (5) bestehen bleiben läßt? Indem man unter zielbewußter Ausnutzung des Rayleighschen Theorems (1) untersuchte, *für welche* $\gamma(\nu, \varepsilon)$-*Wahl* die Entropie, d. h. der *„Logarithmus der Wahrscheinlichkeit“* einer beliebigen schwarzen oder nichtschwarzen Strahlung *bei adiabatischer Kompression* des Spiegelhohlraumes *invariant* bleibt, ergab sich[17]): Hinreichend und notwendig ist hierfür, daß die *Gewichtsfunktion* $\gamma(\varepsilon, \nu)\, d\varepsilon$ das ε und ν nur in der *Verbindung* $\frac{\varepsilon}{\nu}$ enthält, welche *bei der adiabatischen Kompression* des Spiegelhohlraumes *invariant* bleibt:

$$\gamma(\varepsilon, \nu)\, d\varepsilon = g(i)\, d i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6$$

wo

$$\frac{\varepsilon}{\nu} = i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7$$

gesetzt ist. Und eben diese Beschränkung von $\gamma(\nu, \varepsilon)$ ergibt als *Folge*, daß die durch Gl. (4) gelieferten Strahlungsformeln $\varrho(\nu, T)$ dem *Wienschen Verschiebungsgesetz* gehorchen:

$$\varrho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\, \frac{\nu \int_0^\infty d i\, g(i)\, e^{-\frac{i\nu}{kT}}\, i}{\int_0^\infty d i\, g(i)\, e^{-\frac{i\nu}{kT}}} = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{kT}\right) \quad (8$$

Von dem so gewonnenen Gesichtspunkt aus betrachtet besagte also speziell *Plancks* Energiestufenhypothese und die daran anschließende statistische Festsetzung: Nur diejenigen Erregungszustände sind mit einem von Null verschiedenen — und adiabatisch invariant bleibenden! — Gewicht zu belegen, für welche die *bei adiabatischer Kompression invariante Größe (7)* einen der Werte

$$i = 0, h, 2h, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

besitzt[18]). Und dieser Zug adiabatischer Invarianz in der Planckschen Energiestufenhypothese war es also, der allgemein für den Frieden mit dem zweiten Hauptsatz und im besonderen für die Erfüllung des Verschiebungsgesetzes sorgte!

Setzt man

$$\alpha)\ \frac{\nu}{kT} = \sigma \qquad \beta)\ \int_0^\infty d i\, g(i)\, e^{-\sigma i} = Q(\sigma)$$

$$\gamma)\ \int_0^\infty d i\, g(i)\, e^{-\sigma i}\, i = P(\sigma)$$

und beachtet, daß

$$\delta)\quad \frac{P(\sigma)}{Q(\sigma)} = -\frac{\frac{d}{d\sigma}[P(\sigma)]}{Q(\sigma)} = -\frac{d}{d\sigma}[\log Q(\sigma)]$$

so liefert (8) folgende lineare Integralgleichung zur Bestimmung von $g(i)$:

$$\mathrm{e})\quad \int_0^\infty d i\, g(i)\, e^{-\sigma i} = e^{-\frac{c^3}{8\pi}\int d\sigma\, f(\sigma)}$$

falls die Strahlungsformel und also $f(\sigma)$ z. B. als empirische Formel bekannt ist. Man kann so von Aussagen über den Verlauf von $\varrho(\nu, T)$ zu Aussagen über die Gewichtsfunktion $g(i)$ gelangen. — Vor allem ließ sich zeigen[19]): Vermeidung der „Violettkatastrophe“ und genügend rascher Abfall der Strahlungskurve mit wachsendem ν läßt sich nur dadurch erzielen, daß man bei der Gewichtswahl $g(i)$ den Energiewert Null (also $i = 0$) mit einem „Punktgewicht“ belegt und anderseits die daran anschließende Umgebung kleiner Energie- resp. i-Werte mit dem Gewicht Null belegt (siehe exaktere Formulierung l. c. § 8, 9): „Ein genügender Abfall der Strahlungskurve für ... wachsende ν kommt nur dadurch zustande, daß die Resonatoren so etwas wie eine „Reizschwelle“ aufweisen, deren Höhe im

[13]) *P. Ehrenfest* „B“ (1911), § 3.

[14]) Siehe ebendort Gl. (18).

[15]) Und umgekehrt ist (4) eine lineare Integralgleichung für $\gamma(\nu, \varepsilon)$, falls $\varrho(\nu, T)$ gegeben ist (vergl. Fußnote 20).

[16]) l. c. §§ 4, 5.

[17]) l. c. § 5 und „Anhang“ S. 114. Die dort gegebene Ableitung ist unnötig umständlich.

[18]) l. c. § 13.

[19]) l. c. § 8, 9.

übrigen der Frequenz ν proportional ist" (l. c. S. 110). — Integralgleichungen vom Typus (ε) oder ausgebreitet durch „Punktgewichte" g_r:

$$\zeta)^{20)} \quad \sum_{r=1}^{\infty} g_r \, e^{-\sigma i_r} + \int_0^{\infty} \mathrm{d}\, i\, g(i)\, e^{-\sigma i} = \text{bekannte Funktion von } \sigma$$

werden vielleicht in Zukunft eine größere Rolle in der Quantenstatistik spielen, wenn man einmal *Bohrs* Ideen über „unscharfe Quantisierung"[21]) mit dem zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie konfrontieren wird.

§ 5. Die *universelle* Bedeutung von *Plancks* Quantenhypothese für ganz heterogene Gebiete der Physik war allmählich so evident geworden — vor allem durch den Einfluß von *Einsteins* Eingreifen[22]) —, daß Fragestellungen, die zunächst überwiegend kritisch orientiert waren, sich naturgemäß in Fragestellungen ganz anderer Art weiterentwickeln mußten: *Plancks* wunderbar tiefer Fund konnte für einen sinoidal schwingenden Freiheitsgrad als gesichert gelten — wie war nun seine Quantenregel auf nicht mehr sinoidal schwingende Systeme und auf mehrere Freiheitsgrade auszubreiten? *Sommerfelds* Vortrag[23]) in Karlsruhe (1911), die Vorträge und Diskussionen auf dem ersten Solvaykongreß (Nov. 1911) und der Göttinger Wolfskehlwoche von April 1913 geben ein gutes Bild von den Mitteln, mit welchen man in jenem Zeitintervall diese Frage anzufassen trachtete.

Den bedeutsamsten Leitgedanken lieferte dabei eine Formulierung, die *Planck* schon 1906[24]) für seine Hypothese angegeben hatte: die Ellipsen $\varepsilon = 0,\ h\nu,\ 2h\nu, \ldots$ zerlegen die Phasenebene des Resonators in elliptische Streifen, deren Flächeninhalt nicht mehr vom ν des Resonators abhängt, sondern eine universelle Naturkonstante, das „*Wirkungsquantum*" h ist. Die konsekutiven Ellipsen waren also gegeben durch

$$\iint \mathrm{d}\,q\,\mathrm{d}\,p = \int p\,\mathrm{d}\,q = n\,h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10$$

Debye übertrug als erster (1913)[25]) diese Quantenvorschrift (10) auf nichtsinoidale Bewegungen: auf Schwingungen, bei denen die Kraft etwas vom Gesetz von *Hooke* abweicht und deren Phasenlinien also nicht mehr genau Ellipsen sind.

§ 6. Kam man von den in § 4 skizzierten Untersuchungen her, so war man naturgemäß geneigt, sich durch einen anderen Gesichtspunkt weiterleiten zu lassen — den der „adiabatischen Transformation" —, der sich bei der Analyse des Verschiebungsgesetzes so vortrefflich bewährt hatte. Sollte nicht auch für allgemeinere Quantensysteme gelten: bei einer „adiabatischen Beeinflussung", d. h. bei einer Veränderung der Bewegungsbedingungen[26]), die, verglichen mit dem Ablauf der inneren Zustandsänderungen, unendlich langsam erfolgt, geht jede „quantös erlaubte" (in *Bohrs* Terminologie: „stationäre") Bewegung des *undeformierten* Systems in eine „quantös erlaubte" Bewegung des *deformierten* Systems über. War diese „*Adiabatenhypothese*" richtig, so konnte sie vor allem helfen, diejenigen allgemeineren Bewegungen von einem Freiheitsgrad zu quantisieren, welche aus den verschiedenen Quantenbewegungen

$$\frac{\varepsilon}{\nu} = i = n\,h \text{ (vgl. [9]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11$$

eines sinoidalen Resonators durch passende adiabatische Beeinflussung erzeugt werden können. Um in dieser Weise aus (11) die Quantenvorschrift für solch eine allgemeinere Bewegung abzuleiten, galt es, eine Größe I zu finden, die α) auch noch bei diesen Transformationen sinoidaler in nicht sinoidale Bewegungen „adiabatisch invariant" blieb[27]), und die β) für die sinoidale Beginnbewegung mit $i = \frac{\varepsilon}{\nu}$ identisch war. — Man hatte dann die Quantenvorschrift (11) für die *sinoidalen* Beginnbewegungen in die Form

$$I = n\,h \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad (12$$

umzuschreiben, was wegen β) erlaubt war. Und wegen α) blieben sie dann *in dieser Form* auch für die *allgemeineren* Bewegungen gelten, die adiabatisch aus den quantös erlaubten Sinusbewegungen (11) erzeugt und also — nach der Adiabatenhypothese selber quantös erlaubt waren. — Bei dem tastenden Suchen nach diesem I ergab sich sogleich wesentlich mehr: eine adiabatische

---

[20]) l. c. Gl. (60). Diese Integralgleichung behandelt schon *B. Riemann* („Anzahl der Primzahlen . . .". Ges. Werke S. 149). Siehe auch *R. H. Fowler* Proc. of the Roy. Soc. A *99* (1921), S. 462, und *E. Bauer* Thèse Paris 1912 (Gauth. Villars).

[21]) Siehe Fußnote (56).

[22]) *A. Einstein*, Erzeug. u. Verwandl. des Lichtes. Ann. d. Phys. *17*, 132, 1905; Lichterzeug. u. -absorption, Ann. d. Ph. *20*, 627, 1906; Die Plancksche Theorie der Strahlung u. die Theorie d. spezif. Wärme, Ann. d. Ph. *22*, 180, 1907; Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems, Phys. Zschr. *10*, 185, 1909.

[23]) Phys. Zschr. *12*, 1057, 1911.

[24]) *M. Planck* Vorles. über d. Theorie d. Wärmestrahlung, § 150.

[25]) In „Vorträge über die kinetische Theorie der Materie" (Teubner 1914) S. 27.

[26]) Z. B. des Kraftfeldes oder eventueller kinematischer Bedingungen. — Die Bezeichnung „adiabatisch" für derartige Beeinflussungen findet sich bei *H. Hertz*, Principien der Mechanik (1894) § 560 und *L. Boltzmann*, Prinz. d. Mechanik Bd. *II* (1904). Sie verdankt ihren Ursprung dem Umstand, daß sowohl in den ältesten Versuchen einer rein-mechanischen (nicht-statistischen!) Deutung des II. Hauptsatzes [*L. Boltzmann*: Üb. d. mechan. Bedeut. d. II. H. S. Wien. Ak. *53*, 195, 1866; zur Priorität der Auffind. d. Bezieh. zw. II. H. S. u. Prinz. d. kleinst. Wirk. — Ann. d. Phys: *143*, 211, 1871 — siehe Abh. Bd. I. — *R. Clausius* Ann. d. Phys. *142*, 458, 1870] als auch in den „Monocykel-Analogieen" zum II. H. S. [*H. v. Helmholtz* (1884) Wiss. Abh. III S. 119—202; *L. Boltzmann* (1884—85) Wiss. Abh. III S. 122—181; „Prinz. d. Mechan." Bd. II § 51] gerade derartige Beeinflussungen zur Abbildung der adiabatilchen Prozesse in der Thermodyn. verwendet wurden.

[27]) Analog wie $i = \varepsilon/\nu$ bei der *spezielleren* adiabatischen Transformation von einer Sinusbewegung ν nach einer Sinusbewegung ν' invariant geblieben war.

Invariante für Systeme beliebig *vieler Freiheitsgrade,* falls deren Bewegungen *periodisch* sind und während der adiabatischen Transformation *periodisch bleiben* (mit im allgemeinen veränderter Periodizitätsfrequenz ν). Für das über eine Periode genommene *„Wirkungsintegral“* ließ sich nämlich die Aussage ableiten[28]):

$$\oint 2\,T\,dt = \frac{2\,\overline{T}}{\nu} \quad \ldots\ldots \quad (13$$

ist „adiabatisch invariant“. Da für einen sinoidalen Resonator der zeitliche Mittelwert der kinetischen Energie $\overline{T}$ gleich dem der potentiellen Energie und folglich $\varepsilon = 2\,\overline{T}$ ist, so ist hier $\frac{2\,\overline{T}}{\nu} = \frac{\varepsilon}{\nu}$, und die adiabatische Invariante (13 erfüllt also die obengenannte Forderung β). Somit nimmt (12) die Form an:

$$I = \frac{2\,\overline{T}}{\nu} = n\,h \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \quad \ldots \quad (14$$

oder auch

$$I = \oint p\,dq = n\,h \quad \ldots\ldots \quad (15$$

denn für Systeme von einem Freiheitsgrad gilt ja:

$$\int 2\,T\,dt = \int p\,\dot{q}\,dt = \int p\,dq$$

Somit folgte aus der Adiabatenhypothese: Plancks Quantenvorschrift (10) für *Sinusbewegungen* ist auch schon die Quantenvorschrift für alle *allgemeineren Bewegungen von einem Freiheitsgrad,* die aus den ersteren adiabatisch erzeugt werden können.

Schon bei der Anwendung auf sehr einfache Fälle traten übrigens eigentümliche Schwierigkeiten hervor[29]). Es handelte sich z. B. um die Sicherstellung der Quantenbedingungen für die Rotationsbewegungen eines starren Moleküls[30]), das sich *kraftfrei* um eine feste Achse drehen kann. Man konnte zunächst ein etwas allgemeineres System ins Auge fassen: einen starren Dipol, der um eine feste Achse drehend in einem *orientierenden Feld* aufgehängt ist. Je nachdem man das Produkt D aus Dipolmoment und Feldstärke genügend klein oder genügend groß wählt, ist man dann jeweils beliebig nahe einem der beiden Grenzfälle: sinoidal schwingendes Pendel (für das die Quantenbedingungen schon bekannt waren) und „kraftfreier Rotor“ (für den die Quantenbedingungen abgeleitet werden sollten). Geht man von einem sehr großen D-Wert aus, und zwar z. B. von der „quantös erlaubten“ Sinuspendelung $\frac{\varepsilon}{\nu} = 5\,h$, so gelangt man durch unendlich langsame Abschwächung von D zunächst zu *nicht-sinoidalen* Pendelungen endlicher Schwingungsweite, und soweit handelt es sich in der Tat um eine adiabatische Transformation. Bei weiterer Abschwächung von D nähert sich aber die Pendelung der *asymptotischen* Bewegung, welche die Grenze zwischen den Pendelungen und *Rundlaufbewegungen* bildet. Ein *adiabatischer* Durchgang durch diese Grenzbewegung ist aber unmöglich[30]), weil ja bei Annäherung an sie die Periode unbegrenzt wächst und also nicht mehr die Bedingung erfüllt werden kann, daß die Veränderung des D „unendlich langsam, verglichen mit den inneren Zustandsänderungen des Systems“, erfolge.

§ 7. Der Begriff der adiabatischen Invarianz bewährte sich übrigens nicht nur für die *Festlegung* der Quantenbewegungen, sondern auch für die Frage nach ihren *„Gewichten“* („Wahrscheinlichkeiten a priori“). Es ließ sich nämlich das Resultat, das bei der Analyse des Verschiebungsgesetzes betreffs der Gewichtsfunktion $\gamma(\nu, \varepsilon)$ allein für Sinusbewegungen abgeleitet worden war — siehe Gl. (6) —, auf allgemeine Bewegungen ausbreiten[31]): Für die Gültigkeit der Boltzmannschen Relation:

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{\delta E + \delta A}{T}\,k = \delta \log W \quad \ldots \quad (16$$

ist hinreichend und notwendig[32]), daß die *Gewichtsbelegung des „μ-Raumes“ adiabatisch invariant* sei.

Beispiel: Galt als feststehend, daß für **sinoidale** Bewegungen 1) allein die Bewegungen (9) = (12) ein von Null verschiedenes Gewicht besitzen, und zwar 2) für alle Quantenstufen $n = 0, 1, 2, \ldots$, ein und dasselbe Gewicht, so übertrug sich diese Aussage unverändert auf die *allgemeineren* Bewegungen, die aus ihnen adiabatisch erzeugt werden können.

§ 8. In den Jahren 1915 und 1916 entwickelten unter dem Anstoß der Bohrschen Atomtheorie *Wm. Wilson, Planck, Sommerfeld, Epstein* und *Schwarzschild* die Quantenvorschriften für eine sehr umfangreiche Klasse mit mehreren (s) Freiheitsgraden; nämlich für die Bewegungen „mehrfach periodischer“ Systeme mit einem „Periodizitätsgrad“ $u \leq s$[33]), d. h. Bewegungen, die sich in u fache Reihen von harmonischen Schwingungen auflösen lassen; bei denen also die kartesi-

[28]) *P. Ehrenfest* [„D“ 1913]. Gl. (13) ergab sich als direkte Folgerung aus einem Variationstheorem, welches *Boltzmann* und *Clausius* in Verallgemeinerung des „Prinzipes der variierenden Wirkung“ abgeleitet und für mechanische Analogien zum II. H. S. verwendet hatten. Siehe *Boltzmann* Mechanik Bd. II § 48 und die in Fußnote 26) genannten Arbeiten.

[29]) *P. Ehrenfest* [1913 „D“] und [1916 „F“]. — Vgl. hierzu und zum „Beispiel“ am Ende von § 8 die tiefgehenden Untersuchungen von *Bohr,* die in den Fußnoten 46, 49, 54 zitiert werden.

[30]) *P. Ehrenfest* [1913 „C“ und „D“]. Die versuchsweisen Ansätze von *H. A. Lorentz* Solvay-Kongreß (1911) p. 477 und *N. Bjerrum* Nernst-Festschrift (Halle 1912) bedurften einer kleinen Veränderung und näheren Begründung.

[31]) *P. Ehrenfest* [1914 „E“]. — Es sei übrigens auf eine eigentümliche Besonderheit der Hohlraumstrahlung hingewiesen, welche die „wahrscheinlichsten Zustände“ anderer Systeme *im allgemeinen nicht* besitzen: sie geht bei adiabatischer Kompression stets durch „wahrscheinlichste“ Zustände hindurch (d. h. bleibt „schwarz“), gleichgültig, ob man — durch Einschließen eines „Stäubchens Kohle“ in den Spiegelhohlraum — einen Energieaustausch zwischen den verschiedenen Freiheitsgraden des Hohlraumes ermöglicht oder es auch unterläßt. — Siehe *P. Ehrenfest* [1913 „D“ § 4] und [1916 „F“ § 8 Bem. B].

[32]) Falls die Moleküle mehrere Freiheitsgrade besitzen, so einige Einschränkungen für die „Notwendigkeit“.

[33]) Die Terminologie ist hier im Anschluß an *Bohr* [„Grundpostul.“] §§ 2, 3, gewählt.

schen Koordinaten der Systempunkte durch Fourierreihen der Form:

$$\xi = \sum C_{\tau_1 \ldots \tau_u} \cos 2\pi ([\tau_1 \omega_1 + \ldots + \tau_u \omega_u] t + \gamma_{\tau_1 \ldots \tau_u}) \quad . \; . \; (17$$

darstellbar sind. — Gegenüber jeder neuen Ausbreitung der Quantenvorschriften ergab sich natürlich die Frage: ist sie in Übereinstimmung oder in Widerspruch mit der Adiabatenhypothese? — Vor allem ließ sich nun zeigen[34]): In den Quantenvorschriften, die *Sommerfeld* für den „radialen" und „azimutalen" Impuls einer *Zentralkraftbewegung* gegeben hatte:

$$\oint p_r \, dr = n_1 h \quad . \; . \; . \; . \; . \; (18a$$

$$\int_0^{2\pi} p_\varphi \, d\varphi = 2\pi p_\varphi = n_2 h \quad . \; . \; . \; . \; (18b$$

waren die linken Seiten in der Tat invariant gegenüber adiabatischen Veränderungen der Form $f(r)$ dieser Zentralkraft. — Auch traten hier schon scharf die Schwierigkeiten hervor, auf die man im allgemeinen stößt, wenn man adiabatisch durch eine „Degeneration" des Systems hindurchzugehen versucht[35]).

Beispiel: Von der *anisotropen Lissajous*bewegung eines Massenpunktes im Potentialfeld

$$\Phi = \frac{1}{2} (\nu_1^2 x_1^2 + \nu_2^2 x_2^2) \; .$$

mit den bekannten Quantenvorschriften

$$\frac{\varepsilon_1}{\nu_1} = n_1 h, \quad \frac{\varepsilon_2}{\nu_2} = n_2 h,$$

ausgehend, gelangt man durch unendlich langsame Änderung der Parameter ν_1, ν_2 zur „Degeneration" $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ mit dem *isotropen* elastischen *Zentral*kraftfeld:

$$\Phi = \frac{\nu}{2} (x_1^2 + x_2^2) = \frac{\nu r^2}{2}$$

und weiter durch unendlich langsame Verformung zu einem *allgemeinen Zentral*kraftfeld $\Phi = f(r)$. Auf diesem Weg würde man aber im allgemeinen zu Zentralkraftbewegungen gelangen, die die Quantenbedingung ((18 b) für das Flächenmoment verletzen. Falls nämlich ν_1 und ν_2 schon beinahe gleich geworden sind, so erfolgt die Bewegung in einer Lissajousfigur, die ein Rechteck mit Seiten parallel x_1 und x_2 überall dicht ausfüllt, wobei das Flächenmoment außerordentlich langsam zwischen Null (Bewegung beinahe exakt längs einer Diagonale des Rechteckes) und gewissen positiven und negativen Extremweiten (Bewegung längs der flächengrößten Ellipse, die dem Rechteck eingeschrieben ist) hin- und herschwankt. Und da diese eigenartigen „Schwebungen" unbegrenzt langsamer erfolgen, je näher man der Isotropie $\nu_1 = \nu_2$) kommt, so bleibt unbestimmt, mit welchem Wert des Flächenmomentes man in der Isotropie landet. Dieser zufällige Wert bleibt dann aber weiter beim Übergang zum allgemeinen $\Phi = f(r)$ schon erhalten.

§ 9. Die Vermutung[37]), daß auch noch in *Epsteins* Quantenvorschrift:

$$\int p_1 \, dq_1 = n_1 h, \ldots \ldots \int p_s \, dq_s = n_s h \quad . \; (19$$

für Systeme mit s „separierbaren" Koordinaten $q_1 \ldots q_s$ die linken Seiten adiabatisch invariant sind, erforderte zu ihrem Beweise schon schwierigere mathematische Hilfsmittel. Dieser Beweis gelang *J. Burgers*[38]), und zugleich zeigte er: Die zu den Winkelvariabeln (*Bohr*: „uniformisierenden Variabeln"):

$$w_r = \omega_r t + \delta_r \; (r = 1, 2 \ldots, u) \quad . \; . \; . \; (20$$

eines „mehrfach periodischen" Systems (Gl. 17) „konjugierten Momente" $I_1, I_2, \ldots, I_u$ lassen sich stets so auswählen[39]), daß sie adiabatisch invariant sind, und diese Auswahl macht erst die Schwarzschildschen Quantenvorschriften:

$$I_1 = n_1 h, \ldots, I_u = n_u h \quad . \; . \; . \; . \; . \; (21$$

zu *bestimmten* Festsetzungen, und diese Festsetzungen stehen dann also mit der Adiabatenhypothese in Einklang.

Hier traten in noch allgemeinerer Form die Schwierigkeiten hervor, die sich beim Versuch eines adiabatischen Durchgangs durch eine Degeneration einstellen können.

§ 10. Eine weitgehende Klärung und ganz außerordentliche Vertiefung erfuhr die Theorie der adiabatischen Transformation durch *Bohrs* große Arbeit von 1918[40]) und durch die Arbeit, die er kürzlich (1922) über die Grundpostulate der Quantentheorie publiziert hat[41]).

Schon im Jahre 1913 — im Teil III seiner epochalen Arbeit „Über die Konstitution von Atomen und Molekülen" — hatte sich *Bohr* einer adiabatischen Transformation bedient[42]): Er denkt ein Wasserstoffmolekül durch allmähliches Zusammenrücken zweier neutraler Atome entstanden und behandelt diesen Prozeß, der sehr langsam gegen den Umlauf der Elektronen erfolgen soll, nach der klassischen Mechanik (analog: H + He, He + He). — Und in einer Arbeit, die schon 1916 im Korrekturbogen vorlag, aber nur erst 1921 publiziert wurde[43]), verwertete *Bohr* die von mir für periodische Systeme nachgewiesene adiabatische Invarianz von $\frac{2T}{\nu}$ zur Behandlung einer Reihe von sehr interessanten Einzelfragen. Besonders hervorheben möchte ich die schöne Bemerkung über die adia-

[34]) *P. Ehrenfest* [1916 „F"] § 7.

[35]) Vergleiche hierzu die Untersuchungen von *Bohr*, die in den Fußnoten (54. 55) zitiert werden.

[36]) *P. Ehrenfest* [1916 „F" § 9].

[37]) *P. Ehrenfest* [1916 „F" Schlußbemerkung].

[38]) *J. Burgers*, Adiabat. Invarianten bij mechan. Systemen I, II, III Versl. Akad. Amsterd. *25* (1917), S. 849, 918, 1055 = Proc. Amsterd. *20* (1917).149, 158, 163. = Ann. d. Ph. *52* (1917), 195. — *J. Burgers*, Het atoommodel van Rutherford-Bohr (Dissert. Leiden 1918), Hoofdst. VI. — *G. Krutkow*, Bijdrage tot de theorie der adiabat. Invar. Versl. Akad. Amsterd. *27* (1918), 908 = Proc. Amst. *21* (1918), 1112.

[39]) *J. Burgers* lc. III. Vgl. dazu *N. Bohr* [„Grundpostul."], § 2 „Beding. III" und Fußnote 2 auf S. 131.

[40]) *N. Bohr*, „Qu. d. L.".

[41]) *N. Bohr*, „Grundpostul.".

[42]) *N. Bohr*, „Abhandl. über Atombau" Vieweg 1921, Abh. III, § 4.

[43]) *N. Bohr*, „Abh. X", § 1.

batische Reorganisation der Elektronenbewegungen im Falle γ-strahlungsfreier radioaktiver Umsetzungen[44]). Hier dehnt *Bohr* auch den Beweis für die adiabatische Invarianz von $\frac{2T}{\nu}$ auf den Fall relativistisch veränderlicher Massen aus[45]) und beleuchtet näher die in § 6 erwähnte Schwierigkeit beim überschlagenden Pendel[46]).

Zunächst bevorzugte *Bohr* die Bezeichnung „Prinzip der mechanischen Transformierbarkeit"[47]) vor der kürzeren: „Adiabatenprinzip". Dadurch sollte vor allem dem möglichen Mißverständnis vorgebeugt werden, als handle es sich etwa um ein thermodynamisch-statistisches Prinzip[48]). Überdies wurde durch diese Bezeichnung der Nachdruck darauf gelegt, daß nach diesem Prinzip die *Quantensysteme unter gewissen Umständen quasi-klassisch reagieren*, d. h. so, *als ob* sie der klassischen Mechanik gehorchen, wenn man sie nämlich genügend glatten, geduldig-behutsamen äußeren Einflüssen unterwirft — eben den „adiabatischen"; daß sie aber anderseits ihre Quantenkrallen zeigen *dürfen* und (im allgemeinen) zeigen *sollen*, sobald die Beeinflussung nicht mehr genügend geduldig-behutsam erfolgt. Und *Bohr* läßt uns sehen[49]), daß dieser letztere Fall vorliegt, sobald man durch eine noch so langsame Veränderung der Bewegungsbedingungen — also z. B. des äußeren Kraftfeldes — aus einer „Degeneration" mit bestimmtem „Periodizitätsgrad" u heraustretend zu einer geringeren Degeneration mit höherem Periodizitätsgrad u' übergeht: Die Fourierdarstellung (17) der Bewegungen des Systems, die zunächst durch u uniformisierende (Winkel-) Variable $W_1, W_2, \ldots, W_u$ (siehe Gl. 20) erfolgte, erfordert nun noch weitere Winkelvariablen $W_{u+1}, \ldots, W_{u'}$, deren Änderungsgeschwindigkeiten $\omega_{u+1}, \ldots, \omega_{u'}$ in der nächsten Umgebung der Degeneration außerordentlich klein sind. Da also die neu hinzukommenden Periodizitätsgrade zunächst als unendlich langsame Schwingungen auftreten[50]), so ist es unmöglich, die Veränderung des äußeren Kraftfeldes — im Sinne des Adiabatenprinzips — „unendlich langsam, verglichen mit den inneren Bewegungen des Systems" stattfinden zu lassen. Demgemäß verlangt *Bohr*[51]), daß in diesem Fall das System im allgemeinen nicht mehr quasi-klassisch reagiere, sondern sich „*unmechanisch*" auf die Quantenbedingungen

$$I_{u+1} = n_{u+1} h, \; I_{u+2} = n_{u+2} h, \ldots, I_{u'} = n_{u'} h$$

einstelle, die die neu hervortretenden langsamen Schwingungen — zu den neuen Winkelvariabeln $w_{u+1}, w_{u+2}, \ldots, w_{u'}$ gehörig — mit sich bringen.

Damit vollzog *Bohr* einen Schritt, dessen Bedeutsamkeit für die Weiterentwicklung der Quantentheorie wohl erst nur in der Zukunft in vollem Umfang überblickbar sein wird. — *Bohr* stellt hier auch einen vielversprechenden Kontakt zwischen Adiabaten- und Korrespondenzprinzip her[52])! Denn durch sein Korrespondenzprinzip läßt sich ja *Bohr* leiten, wenn er nachdrücklich und schließlich siegreich gegenüber anderer Meinung die Auffassung verteidigt, daß die Anzahl der Quantenbedingungen eines Systems nicht etwa immer gleich der Anzahl seiner Freiheitsgrade (s), sondern stets gleich seinem „Periodizitätsgrad" (u) sei[53]). Hier beim unendlich langsamen Herausgehen aus einer Degeneration treten also im Sinne des Korrespondenzprinzips zugleich mit den neuen langsamen Schwingungen auch die neuen Quantenzahlen $n_{u+1}, n_{u+2}, \ldots, n_{u'}$ auf, deren Veränderungen Übergangsprozesse bezeichnen, die gerade jenen neuen Schwingungen „korrespondieren".

§ 11. Die hier angedeuteten, bahnbrechenden Ideen hat *Bohr* mit Hilfe der Störungsrechnung in voller Allgemeinheit entwickelt[54]) und auf wichtige Beispiele von Degenerationen[55]) wie auch auf das oben in § 4 und § 7 berührte Problem der *„adiabatischen Invarianz der statistischen Gewichte*[56]) angewendet[57]).

Diese Betrachtungen gehören wohl — es sei die Unbescheidenheit solchen Urteilens verziehen! — zu dem Tiefsten und zugleich Schönsten, was

[44]) Ebenda, S. 131.
[45]) S. 131, 132.
[46]) Fußnote 3), S. 127.
[47]) *N. Bohr*, „Qu. d. L.", S. 9. — *N. Bohr*, Geleitwort", S. XIII.
[48]) *N. Bohr*, „Qu. d. L.", S. 9, Fußnote. — In seinen letzten Arbeiten akzeptiert aber *Bohr* die kürzere Bezeichnung „Adiabatenprinzip". — Siehe *N. Bohr*, „Grundpostul.", S. 131, Fußnote 1.
[49]) *N. Bohr*, „Qu. d. L.", S. 29.
[50]) Vgl. oben das „Beispiel" am Ende von § 8.
[51]) *N. Bohr*, „Q. d. L.", S. 31; ferner „Geleitwort", S. XV—XVI, und „Grundpostul.", S. 132 u. S. 146.

[52]) *N. Bohr*, „Geleitwort", S. XVI oben; „Grundpostul.", S. 146 oben.
[53]) *N. Bohr*, „Q. d. L.", S. 23 Fußnote, 26—27, 88, 105, 119; „Geleitwort", S. XV!; „Grundpostul.", S. 120 Gl. (A), 127, 145—146.
[54]) Siehe besonders *N. Bohr*, „Q. d. L.", S. 29—33, 58—88(!); „Grundpostul.", S. 123—135.
[55]) *N. Bohr*, „Q. d. L.", S. 101, 110, 119; „Grundpostul.", S. 149 Fußnote über die „räumliche Quantelung bei dem wunderbaren Experiment von *O. Stern* und *W. Gerlach*".
[56]) *N. Bohr*, „Q. d. L.", S. 11, 34—37, 107 (Fußnote!!), 133 (Fußnote!!); „Grundpostul.", S. 135—137, 138 (!!). Ganz besonders zu beachten sind hier *Bohrs* Bemerkungen über die Gewichte im Falle von Degeneration und über das Ausgeschlossensein solcher stationärer Bewegungen, welche sich adiabatisch in solche Bewegungen überführen lassen, für welche es feststeht, daß sie das *Gewicht Null* besitzen — siehe die durch (!!) gekennzeichneten Stellen. *Bohr* hat — siehe „Grundpostul.", S. 136 Fußnote — meinen Beweis für die „adiab. Invar. d. Gewichte" [1914 „E"] dadurch vereinfacht, daß er sich von vornherein auf *diskrete* stationäre Zustände beschränkt. *Bohrs* Ideen über *nicht völlig scharfe Festlegung von stationären Bewegungen* [„Q. d. L.", S. 69, 70, 85, 139, 140; „Geleitwort", S. XVI—XVII (!!); „Grundpostul.", S. 127 unten, 134, 151—152] werden aber vielleicht gelegentlich ein Zurückgreifen auf meine umständlichere Betrachtung *kontinuierlicher* Gewichtsverteilungen nötig machen.
[57]) Beachte *Bohrs* interessante Verwertung adiab. Transformationen für die Festlegung des Begriffes Energiedifferenz verschiedener station. Bewegungen „Q. d. L.", S. 10; „Grundpost.", S. 133.

wir bisher überhaupt über die Grundlagen der Quantentheorie besitzen. Und schon läßt *Bohr* uns ahnen, wie der Weg weiter führen soll zu einem „*Prinzip der Existenz und Permanenz der Quantenzahlen*[58]), dessen Gültigkeit nicht mehr an die Beschränkung gebunden sein soll[59]), daß *alle* Bewegungen des betrachteten Systems „mehrfach periodisch" sind!